1161 – Seçkin ARI | ari@sakarya.edu.tr

2017 Yazokulu BLNT6NBS Dersnotu
http://www.bulentaltinbas.com.tr/Isaretler_ve_Sistemler_6NBAS_DersNotu.pdf

2017 Yazokulu Vize-Quiz-Final
http://www.bulentaltinbas.com.tr/Isaretler_ve_Sistemler_6NBAS_QVF_Sinav.pdf

1.Soru Birim darbe cevabı $h(n)=u(n)$ verilen sistemin $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$ işaretine olan cevabı $y(n)'yi$ konvolüsyon ile bulunuz **Cevap:** $y(n)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u(n-1)$

Çözüm

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(n-k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k u(k-1)\cdot u(n-k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \underbrace{u(n-k)}_{\text{1 yapan değer}}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha^k=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha^k=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n-1=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \underbrace{u(n-k)}_{\text{1 yapan değer}}=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u(n-1)$$

Bu tarz sorularda kullanılabilecek $\sum$ formülleri

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{-k}=\frac{1-\alpha^{-n}}{1-\alpha^{-1}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\begin{cases}\alpha=1\,için & N\\ \alpha\neq 1\,için & \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha}\end{cases}$$

$$|\alpha|<n \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

2.Soru $n \geq 0$ için fark denklemi $y(n) = 2y(n-1) - y(n-2) + x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = 1$ ve $y(-2) = 0$ başlangıç koşulları ile $x(n) = u(n)$ işaretine olan toplam çözümünü bulunuz. **Cevap:**

$$y_t(n) = \left(3 + \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}n^2\right)u(n)$$

Çözüm

$y(n) = 2y(n-1) - y(n-2) + x(n)$ $\qquad x(n) = u(n)$ $\qquad y(-1) = 1$ $\qquad y(-2) = 0$

$$y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = x(n)$$

$y(n) = \lambda^n$ ve $x(n) = 0$

$$\begin{aligned} y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) &= x(n) \\ \lambda^n - 2\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} &= 0 \\ \lambda^{n-2}(\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 1}_{\lambda_{1,2}=1}) &= 0 \end{aligned}$$

$$y_d(n) = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n$$

$$n = 0 \begin{cases} y(0) - 2\underset{1}{y(-1)} + \underset{0}{y(-2)} = 0 \\ y(0) - 2 + 0 = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_d(0) &= c_1 \\ c_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$n = 1 \begin{cases} y(1) - 2\underset{2}{y(0)} + \underset{1}{y(-1)} = 0 \\ y(1) - 4 + 1 = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_d(1) &= c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 &= 3 \\ 2 + c_2 &= 3 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_d(n) &= c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n \\ &= 2(1)^n + 1n(1)^n \\ &= 2 + n \end{aligned}$$

$x(n) = u(n)$ olduğu için $y_ö(n) = Ku(n)$

$$\begin{aligned} y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) &= x(n) \\ Ku(n) - 2Ku(n-1) + Ku(n-2) &= u(n) \\ \underbrace{K - 2K + K}_{0} &= 1 \\ y_ö(n) &= Kn^2u(n) \end{aligned}$$

?

$$y_{ö}(n)=Kn^2u(n)$$
$$y(n)-2y(n-1)+y(n-2)=x(n)$$
$$Ku(n)^2-2Ku(n-1)^2+Ku(n-2)^2=u(n)$$
$$Kn^2-2K(n-1)^2+K(n-2)^2=1$$
$$Kn^2-2K(n^2-2n+1)+K(n^2-4n+4)=1$$
$$\cancel{Kn^2}-\cancel{2Kn^2}+\cancel{4Kn}-2K+\cancel{Kn^2}-\cancel{4Kn}+4K=1$$
$$2K=1$$
$$K=\frac{1}{2}$$

$$y_z(n)=c_3\lambda_1^{\,n}+c_4n\lambda_1^{\,n}+y_{ö}(n)$$

Başlangıç koşulları $y(-1)=0$ ve $y(-2)=0$ kabul edilir $\qquad y_{ö}(n)=\frac{1}{2}n^2u(n) \qquad \lambda_{1,2}=1$

$$n=0\begin{cases} y(n)-2y(n-1)+y(n-2)=x(n) \\ y(0)-2\underbrace{y(-1)}_{0}+\underbrace{y(-2)}_{0}=1 \\ y(0)-0+0=1 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$y_z(n)=c_3\lambda_1^{\,n}+c_4n\lambda_1^{\,n}+y_{ö}(n)$$
$$y_z(0)=c_3$$
$$c_3=1$$

$$n=1\begin{cases} y(n)-2y(n-1)+y(n-2)=x(n) \\ y(1)-2\underbrace{y(0)}_{1}+\underbrace{y(-1)}_{0}=1 \\ y(1)-2+0=1 \\ y(1)=3 \end{cases}$$

$$y_z(n)=c_3\lambda_1^{\,n}+c_4n\lambda_1^{\,n}+y_{ö}(n)$$
$$y_z(1)=c_3+c_4n+\frac{1}{2}n^2$$
$$c_3+c_4+\frac{1}{2}=3$$

$$c_3=1$$
$$c_3+c_4+\frac{1}{2}=3$$
$$c_4=\frac{3}{2}$$

$$y_d(n)=c_1\lambda_1^{\,n}+c_2n\lambda_1^{\,n}=2+n$$
$$y_z(n)=c_3\lambda_1^{\,n}+c_4n\lambda_1^{\,n}+\underbrace{y_{ö}(n)}_{\frac{1}{2}n^2}=1+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}n^2$$
$$y_t(n)=y_d(n)+y_z(n)=\underbrace{2+n}_{y_d(n)}+\underbrace{1+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}n^2}_{y_z(n)}=\left(3+\frac{5}{2}n+\frac{1}{2}n^2\right)u(n)$$

3.Soru $n \geq 0$ fark denklemi $y(n) = y(n-1) + x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = 1$ başlangıç koşulu ile $x(n) = u(n)$ işaretine olan toplam çözümünü bulunuz. **Cevap:** $y_t(n) = (2+n)u(n)$

Çözüm

$y(n) = y(n-1) + x(n)$ $\qquad x(n) = u(n)$ $\qquad y(-1) = 1$

$y(n) - y(n-1) = x(n)$

$y(n) = \lambda^n$ ve $x(n) = 0$

$$y(n) - y(n-1) = x(n)$$
$$\lambda^n - \lambda^{n-1} = 0 \qquad y_d(n) = c_1 \lambda_1^{\,n}$$
$$\underbrace{\lambda^{n-1}(\lambda - 1) = 0}_{\lambda_1 = 1}$$

$$n = 0 \begin{cases} y(0) - \underbrace{y(-1)}_{1} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y_d(0) &= c_1 \\ c_1 &= 1 \end{aligned} \qquad y_d(n) = c_1 \lambda_1^{\,n} = 1$$

$x(n) = u(n)$ olduğu için $y_ö(n) = Knu(n)$

$$y(n) - y(n-1) = x(n)$$
$$Knu(n) - Kun(n-1) = u(n)$$
$$Kn - Kn^2 + Kn = 1 \qquad y_ö(n) = nu(n)$$
$$Kn^2 - 2Kn + 1 = 0$$
$$K = 1$$

$y_z(n) = c_2 \lambda_1^{\,n} + y_ö(n)$

Başlangıç koşulları $y(-1) = 0$ kabul edilir $\qquad y_ö(n) = 1nu(n) \qquad \lambda_1 = 1$

$$n = 0 \begin{cases} y(n) - y(n-1) = x(n) \\ y(0) - \underbrace{y(-1)}_{0} = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y_z(n) &= c_2 \lambda_1^{\,n} + y_ö(n) \\ y_z(0) &= c_2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_z(n) &= c_2 \lambda_1^{\,n} + \underbrace{y_ö(n)}_{n} \\ &= 1 + n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_t(n) &= y_d(n) + y_z(n) \\ &= \underbrace{1}_{y_d(n)} + \underbrace{1+n}_{y_z(n)} \end{aligned}$$

4.Soru $x(n)=\begin{cases} n & 0\le n\le N-1 \\ N & N\le n \end{cases}$ olarak veriliyorsa $X(z)$ yi bulunuz? **Cevap:**

$$X(z)=\frac{z^{-1}\left(1-z^{-N}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^2} \quad ve \quad |z|>1$$

Çözüm

$$x(n)=n\left(u(n)-u(n-N)\right)+Nu(n)$$
$$x(n)=nu(n)-nu(n-N)+Nu(n)$$
$$x(n)=nu(n)-\left(n-N\right)nu(n-N)$$

$$x(n)=\underbrace{n\underbrace{u(n)}_{x_1}}_{x_2}-\underbrace{\left(n-N\right)nu(n-N)}_{x_3}$$

$$x_1(n)=u(n)$$
$$X_1(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$x_2(n)=nu(n)$$
$$X_2(z)=-z\frac{d}{dz}X_2(z)$$
$$=\frac{0\cdot\left(1-z^{-1}\right)-z^{-2}\cdot 1}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$
$$=\frac{-z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$x_3(n)=\left(n-N\right)u(n-N)$$
$$X_3(z)=z^{-N}X_2(z)$$
$$=z^{-N}\frac{-z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$
$$=\frac{z^{-N-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$x(n-k)\Rightarrow z^{-k}x(z)$$
$\left(n-N\right)u(n-N)\Rightarrow nu(n)$ in N kadar ötelenmesi z^{-N} ile çarptık

5.Soru $x(n)=(-1)^n(2)^{-n}u(n)$ işaretinin z dönüşümünü bulunuz? **Cevap:** $X(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ *ve* $|z|>\dfrac{1}{2}$

Çözüm

$$
\begin{aligned}
x(n) &= (-1)^n(2)^{-n}u(n) \\
&= (-1)^n\left((2)^{-1}\right)^n u(n) \\
&= (-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \\
&= \left(-1+\frac{1}{2}\right)^n u(n) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)
\end{aligned}
$$

$$x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)z^{-1}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}
\end{aligned}
$$

$$|z|>\left|-\frac{1}{2}\right|$$

$$|z|>\frac{1}{2}$$

$$u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$a^n\leftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}$$

6.Soru Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin $x(n)=u(n)+(2)^n(-n-1)$ işaretine olan cevabı $y(n)=5\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)-5\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$ olduğu veriliyorsa.

a) Sistemin transfer fonksiyonu $H(z)$ ' yi yakınsama bölgesi ile bulun. **Cevap:**

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \quad ve \quad |z|>\frac{2}{3}$$

b) Sistemin birim darbe cevabı $h(n)$ 'yi yazın. **Cevap:** $h(n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(u(n)-3u(n-1)\right)$

c) Sistemin fark denklemi olarak ifadesini yazın. **Cevap:** $y(n)-\frac{2}{3}y(n-1)=x(n)-2x(n-1)$

Çözüm

a)

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{5\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}\right)}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\underbrace{\frac{1}{1-2z^{-1}}}_{(2)^n(-n-1)}}=5\frac{\left(\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}-1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}\right)}\right)}{\left(\frac{1-2z^{-1}+1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}\right)}=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{2}{3}$$

b)

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}-\frac{2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$$

$$\begin{aligned}h(n)&=\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)-2.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}u(n-1)\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)-\cancel{2}.\frac{3}{\cancel{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n-1)\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(u(n)-3u(n-1)\right)\end{aligned}$$

c)

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}\times\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$$

$$Y(z)(1-\frac{2}{3}z^{-1})=X(z)\left(1-2z^{-1}\right)$$

$$Y(z)-\frac{2}{3}z^{-1}Y(z)=X(z)-2z^{-1}X(z)$$

$$y(n)-\frac{2}{3}y(n-1)=x(n)-2x(n-1)$$

7.Soru Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin $x(n)=u(n)$ işaretine olan cevabı $y(n)=nu(n)$ olduğu veriliyorsa

a) Sistemin transfer fonksiyonu $H(z)$' yi yakınsama bölgesi ile bulunuz. **Cevap:**

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad ve \quad |z|>1$$

b) Sistemin birim darbe cevabı h————————————————————————'yi yazınız. **Cevap:** $h(n)=u(n-1)$

c) Sistemin fark denklemi olarak ifadesini yazınız. **Cevap:** $y(n)-y(n-1)=x(n-1)$

d) Sistemin kararlı olup olmadığını nedeniyle birlikte açıklayınız. **Cevap:** $\sum_n h(n)=\sum_n u(n-1)=\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$ olduğu için kararsızdır.

e) Sistemin nedensel olup olmadığını nedeniyle birlikte açıklayınız. **Cevap:** $n<0 \;\; iken \;\; h(n)=0$ olduğundan nedensel.

Çözüm

a) $$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{-z\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1-z^{-1}}\right)}{\dfrac{1}{1-z^{-1}}}=\frac{\dfrac{z\cdot z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}}{\dfrac{1}{1-z^{-1}}}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad ve \quad |z|>1$$

b) $$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad |z|>1 \quad \Rightarrow \quad h(n)=u(n-1)$$

c)
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \qquad \frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$
$$Y(z)\left(1-z^{-1}\right)=X(z)z^{-1}$$
$$Y(z)-z^{-1}Y(z)=z^{-1}X(z)$$
$$y(n)-y(n-1)=x(n-1)$$

d) $\sum_n h(n)=\sum_n u(n-1)=\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$ olduğu için kararsızdır.

e) $h(n)=u(n-1)$ $\qquad n<0 \;\; iken \;\; h(n)=0$ olduğundan nedensel. *n veya n-k olduğu zaman nedensel*

8.Soru $y(n)=ay(n-1)+bx(n-1)$ fark denklemine ait sistemin birim darbe cevabının $\sum_n h(n)=1$ eşitliğini sağlaması için b'nın a cinsinden karşılığını yazınız. **Cevap:** $b=1-a$

Çözüm

$$y(n)=ay(n-1)+bx(n-1)$$
$$y(n)-ay(n-1)=bx(n-1)$$
$$Y(z)-az^{-1}Y(z)=bz^{-1}X(z)$$
$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}}$$
$$H(z)=\frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}}$$
$$h(n)=b\cdot a^{n-1}u(n-1)$$

$$\sum_n h(n)=1$$
$$\sum_n b\cdot a^{n-1}u(n-1)=1$$
$$b\sum_n \frac{a^n}{a}u(n-1)=1$$
$$\frac{b}{a}\sum_n a^n u(n-1)=1$$
$$\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{1}{1-a}-1\right)=1$$

$$b=1-a$$

$$\sum_n a^n u(n)=\frac{1}{1-a}$$

9.Soru Giriş işaretinin z dönüşümü $\frac{1}{5} < |z| < 3$ yakınsama bölgesi ile $X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1 + 3z^{-1}\right)}$ ve sistemin transfer fonksiyonu $|z| > \frac{1}{3}$ yakınsama bölgesi ile $H(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$ olarak veriliyorsa. Çıkış işaretinin z dönüşümünü $Y(z)$ yakınsama bölgesi ile birlikte belirleyin. **Cevap:**

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad ve \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Çözüm

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)\cancel{\left(1 + 3z^{-1}\right)}} \cdot \frac{\cancel{1 + 3z^{-1}}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad ve \quad |z| > \frac{1}{3}$$